§ 4. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип возможных перемещений, или принцип Лагранжа, содержит необходимые и достаточные условия равновесия некоторых механических систем. Он формулируется следующим образом: *для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю,* т. е.

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \qquad (7)$$

где $\bar{F}_k$ — активная сила, приложенная к k-й точке системы; $\bar{r}_k$ — радиус-вектор этой точки (рис. 94).

Докажем необходимость условия (7) для равновесия системы, т. е. докажем, *что если система находится в равновесии, то активные силы удовлетворяют условию* (7). Действительно, если механическая система находится в рановесии, то для каждой ее точки активная сила $\bar{F}_k$ и сила реакции связей $\bar{R}_k$ удовлетворяют условию равновесия статики для сил, приложенных к точке:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на возможное перемещение точки $\delta \bar{r}_k$ и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

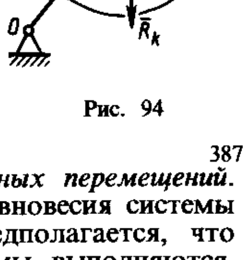

Рис. 94

По условию идеальности связей, $\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и для активных сил получаем условие (7).

Докажем достаточность условия (7) для равновесия системы, т. е. что *если это условие выполняется для активных сил, действующих на точки системы, то система находится в равновесии при*

выполнении других условий принципа возможных перемещений. Теорема о достаточности условия (7) для равновесия системы доказывается методом от противного. Предполагается, что условие (7) и все остальные условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. Если теорема о достаточности справедлива, то должно возникнуть противоречие с условиями теоремы. Итак, пусть все условия теоремы выполняются, а система вышла из равновесия. При этом, по крайней мере для одной точки системы, не будет выполняться условие равновесия для сил, т. е.

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k \neq 0. \qquad (8)$$

Дадим системе возможное перемещение. Так как связи стационарные, то элементарное действительное перемещение для каждой точки системы под действием не равной нулю равнодействующей силы принадлежит к числу возможных перемещений и их совокупность можно выбрать в качестве возможного перемещения системы. Скорости точек системы в рассматриваемый момент времени по условию равны нулю; следовательно, элементарные действительные перемещения будут направлены по ускорениям точек, т. е. по равнодействующим силам. Умножая (8) скалярно на $\delta \bar{r}_k = d\bar{r}_k$, получим

$$\left(\bar{F}_k + \bar{R}_k\right) \cdot \delta \bar{r}_k > 0 \qquad (9)$$

по крайней мере для одной точки системы, вышедшей из равновесия. Суммируя (9) по всем точкам системы, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0. \qquad (9')$$

Для идеальных связей

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Поэтому из (9′) получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k > 0,$$

что находится в противоречии с условием (7). Следовательно, система не может выйти из равновесия при выполнении условий принципа возможных перемещений. Принцип полностью доказан.

Без дополнительного условия о равенстве нулю скоростей точек системы в рассматриваемый момент принцип возможных перемещений утверждает только то, что равны нулю ускорения точек системы. Вместе с равенством нулю скоростей точек это дает равновесие системы в тот момент, в который выполняется для активных сил условие (7). При длительном

выполнении этого условия система соответственно будет находиться в равновесии тоже длительно, т. е. скорости и ускорения точек равны нулю, если скорости точек системы равны нулю в начале интервала длительности.

В принцип возможных перемещений не входят силы реакций связей. Но его можно применять также и для определения неизвестных сил реакций связей. Для этого связь, силы реакции которой необходимо определить, отбрасывают (освобождают систему от этой связи), заменяя ее силами реакции. Эти силы добавляют к активным силам. Оставшиеся связи системы должны быть идеальными. Иногда неидеальную связь заменяют идеальной, компенсируя неидеальность соответствующими силами. Так, если связью для тела является шероховатая поверхность, то ее можно заменить гладкой поверхностью, добавляя к активным силам силу трения скольжения и в более общем случае — еще и пару сил, препятствующую качению. Связь в виде заделки для твердого тела можно заменить неподвижным шарниром, плоским или шаровым соответственно, добавляя момент заделки, векторный или алгебраический. Таким образом, в принцип возможных перемещений входят в действительности не активные силы, а все приложенные к точкам системы силы, кроме сил реакций идеальных связей, которые по условиям задач не требуется определять.

Пример 1. В механизме (рис. 95) допускается поворот кривошипа OA вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. По стержню OA может перемещаться ползун B, шарнирно соединенный со стержнем BC, который может скользить вдоль вертикальных направляющих. К кривошипу OA приложена пара сил с моментом M; $OD = l$.

Определить вертикальную силу $\bar{F}$, приложенную к стержню BC в зависимости от угла φ, при равновесии механизма. Силами тяжести звеньев механизма и силами трения пренебречь.

Решение. Связи в механизме неосвобождающие и стационарные. Они не создают сил трения, а потому идеальные. Применим к механизму принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Активными силами являются $\bar{F}$ и пара сил с моментом M.

Дадим системе возможное перемещение, допускаемое наложенными связями, повернув мысленно стержень OA на элементарный угол $\delta\varphi$ в сторону возрастания угла φ. Тогда, согласно принципу возможных перемещений,

$$-M\delta\varphi + F\delta y_C = 0, \qquad \text{(a)}$$

где δy_C — возможное перемещение точки C. Стержень BC твердый, поэтому перемещения его концов B и C при наложенных связях равны, т. е. $\delta y_C = \delta y_B$.

У механизма только одна степень свободы, поэтому $\delta\varphi$ и δy_B зависят друг от друга. Установим предварительно зависимость y_B от

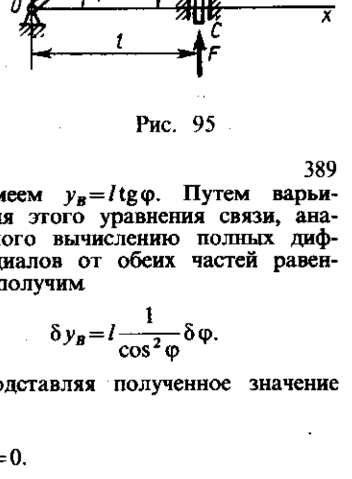

Рис. 95

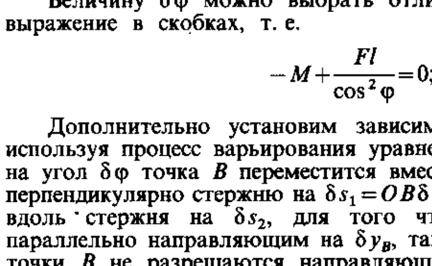

Рис. 96

φ. Имеем $y_B = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Путем варьирования этого уравнения связи, аналогичного вычислению полных дифференциалов от обеих частей равенства, получим

$$\delta y_B = l \frac{1}{\cos^2\varphi} \delta\varphi.$$

Подставляя полученное значение δy_B в (а) и вынося $\delta\varphi$ за скобки, имеем

$$\delta\varphi\left(-M + \frac{Fl}{\cos^2\varphi}\right) = 0.$$

Величину $\delta\varphi$ можно выбрать отличной от нуля, а потому равно нулю выражение в скобках, т. е.

$$-M + \frac{Fl}{\cos^2\varphi} = 0; \quad F = M\cos^2\varphi / l.$$

Дополнительно установим зависимость $\delta\varphi$ и δy_B непосредственно, не используя процесс варьирования уравнения связи. При повороте стержня OA на угол $\delta\varphi$ точка B переместится вместе с соответствующей точкой стержня перпендикулярно стержню на $\delta s_1 = OB\,\delta\varphi$ и, кроме того, ползун B передвинется вдоль стержня на δs_2, для того чтобы точка B переместилась только параллельно направляющим на δy_B, так как другие направления перемещения точки B не разрешаются направляющими стержня BC. Вектор возможного перемещения точки B изобразится диагональю прямоугольника, построенного на составляющих перемещениях. Из прямоугольника для его диагонали имеем

$$\delta y_B = \delta s_1 / \cos\varphi, \quad \text{или} \quad \delta y_B = \frac{OB}{\cos\varphi}\delta\varphi = \frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi,$$

так как

$$OB = l/\cos\varphi.$$

Пример 2. Стержневая система (рис. 96), расположенная в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием двух пар сил с моментами M_1 и M_2. Стержни AC и BD параллельны. Стержень BC составляет с ними угол α.

Пренебрегая силами тяжести стержней и трением в шарнирах, определить реакции в заделке и усилие в стержне BD.

Решение. Освободим систему стержней от заделки, приложив силы X_A, Y_A и момент в заделке M_A (рис. 97, *а*). Оставшиеся связи являются идеальными, если в них не возникает сил трения.

Рис. 97

Дадим стержню AC возможное перемещение δs, допускаемое оставшимися связями, в направлении оси Ax. Точка B может иметь перемещение δs_B, перпендикулярное только BD.

Для возможных перемещений точек твердого тела, аналогично мгновенному центру скоростей при плоском движении, можно построить мгновенный центр перемещений. Для установления связи между возможными перемещениями точек твердого тела можно использовать и другие положения о связи скоростей точек твердого тела при плоском движении и в других случаях движения.

Мгновенный центр перемещений стержня BC находится на перпендикулярах к возможным перемещениям точек B и C. Вокруг P стержень BC повернется на угол $\delta\varphi$, который определяется отношением перемещения δs к расстоянию CP, т. е.

$$\delta\varphi = \frac{\delta S}{CP} = \frac{\delta s}{l_2 \sin\alpha}. \qquad \text{(а)}$$

Из принципа возможных перемещений имеем

$$X_A \delta s + M_2 \delta\varphi = 0. \qquad \text{(б)}$$

Моменты пары сил M_2 и угол $\delta\varphi$ имеют одинаковые направления — по часовой стрелке, поэтому элементарная работа пары сил является положительной.

Подставляя (а) и (б), получаем

$$X_A = -\frac{M_2}{l_2 \sin\alpha}.$$

Для определения M_A дадим системе возможное перемещение, повернув стержень AC вокруг точки A на угол $\delta\varphi_1$ (рис. 97, *б*). Из принципа возможных перемещений в этом случае имеем

$$M_A \delta\varphi_1 + M_1 \delta\varphi_1 = 0.$$

Следовательно, $M_A = -M_1$.

Чтобы определить Y_A (рис. 97, *в*), дадим стержню AC возможное перемещение, повернув его на угол $\delta\varphi_2$ вокруг точки C. Получим

$$M_1 \delta\varphi_2 + M_A \delta\varphi_2 - Y_A l_1 \delta\varphi_2 = 0;$$

$$Y_A = 0.$$

Для определения усилия в стрежне BD отбросим этот стрежень, заменив его действие силой $\bar{S}$, направленной по стержню, сохранив заделку (рис. 97, *г*). В этом случае связи допускают поворот стрежня BC на угол $\delta\varphi_3$. Точка B при этом переместится на δs_B. Проекция перемещения на направление силы $\bar{S}$ при этом равна $\delta s_B \sin\alpha = l_2 \delta\varphi_3 \sin\alpha$. Составляя сумму элементарных работ на этом возможном перемещении и приравнивая ее нулю, согласно принципу возможных перемещений, имеем

$$M_2 \delta\varphi_3 + S\delta s_B \sin\alpha = 0,$$

откуда получаем

$$S = \frac{M_2}{l_2 \sin\alpha}.$$

Освобождать от связей систему можно не полностью. Так, например, заделка эквивалентна шарниру вместе с моментом заделки.